

De twee getallen van Hipparchus

Hans Meijer

Over het verre verleden hangt vaak een dichte vrijwel ondoordringbare mist. Zo schreef de Griekse astronoom Hipparchus, die van 190 tot 120 voor Christus leefde, veertien boeken waarvan er slechts twee aan ons zijn overgeleverd. De rest is verloren gegaan. Fragmenten van zijn andere boeken zijn onder meer via Plinius, Ptolemaeus en Plutarchus tot ons gekomen. Sommige van die fragmenten stellen ons voor raadsels. Zo komen in twee essays van de Griekse historicus Plutarchus, die van 46 tot 120 na Christus leefde, twee getallen voor die hij aan Hipparchus toeschrijft. Er rijzen twee vragen. Waar hebben deze getallen precies betrekking op en hoe heeft Hipparchus ze berekend.



Hipparchus van Nicaea (190 – 120 v.Chr.)

Voorlopige antwoorden op deze vragen zijn te vinden in de geschriften van Fabio Acerbi, Susanne Bobzien, Richard Stanley, Laurent Habsieger, Kevin Brown en mijzelf, zie de referenties aan het einde van deze column. Voor de definitieve antwoorden moeten we wachten tot de notities van Hipparchus zelf opduiken. Wie weet liggen ze ergens op een stoffige plank in een vergeten bibliotheek op een onderzoeker die het Grieks beheerst en verstand heeft van Stoïcijnse logica, combinatoriek (de kunst van het tellen) en shatranj (het Arabische schaakspel) te wachten. In dit artikel zal ik met name dit laatste aspect, de relatie tussen de Hipparchus getallen en shatranj, toelichten.

De twee fragmenten uit de essays van Plutarchus over de getallen van Hipparchus. In *Quaestiones Convivales (Table-Talk)*, *Moralia Vol. VIII*, noteert hij 'Chrysippus says that the number of compound

propositions that can be made from only ten simple propositions exceeds a million. (Hipparchus, to be sure, refuted this by showing that on the affirmative side there are 101049 compound statements, and on the negative side 310952.)' en in *De Stoicorum repugnantis (Contradictions of the Stoics)*, *Moralia Vol. XIII*, noteert hij 'Chrysippus says, that the connections made by ten axioms amount to above a million in number, having neither searched diligently into it by himself nor attained to the truth by men experienced in it. All the arithmeticians refute Chrysippus, amongst whom is Hipparchus, demonstrating that the error of his computation is very great; since the affirmative makes of the ten axioms one hundred and three thousand forty and nine (103049) connections, and the negative three hundred and ten thousand nine hundred fifty and two (310952).'

Wat te denken van de getallen 101049 (103049) en 310952? Hipparchus wordt beschouwd als een van de grootste astronomen uit de Griekse oudheid en hij was een bekwaam wiskundige aan wie we onder meer onze sinustafels te danken hebben. We kunnen er dus met grote zekerheid van uitgaan dat hij deze getallen berekend heeft maar hoe is volstrekt onduidelijk. Richard Stanley, Fabio Acerbi en Laurent Habsieger leggen in hun artikelen een link met bepaalde problemen uit de combinatoriek en laten zien dat we de getallen 101049 en 310954 in verband kunnen brengen met de zogenaamde Schröder getallen. Dit zijn getallen die vernoemd zijn naar de wiskundige Ernst Schröder. Laten we dit eens nader bekijken.

Acerbi begint zijn diepzinnige artikel over Hipparchus met de zin 'To write about combinatorics in ancient Greek mathematics is to write about an empty subject' maar naar aanleiding van het verband tussen de twee door Hipparchus gegeven getallen en de Schröder getallen stelt hij dat 'The effects of this observation are disruptive: it is absolutely plain that the whole issue of ancient Greek combinatorics must be reconsidered from an entirely different perspective, taking into account that, as we shall see, comparatively refined techniques are required to compute the above numbers.'

Ook Stanley en Brown komen tot de conclusie dat Hipparchus diepgaande kennis van combinatoriek moet hebben gehad. Zij suggereren verschillende methoden voor de wijze waarop Hipparchus deze twee getallen berekend zou kunnen hebben. De methode die Stanley beschrijft is exact maar verre van triviaal. Die van Brown is eenvoudiger maar een streng bewijs ontbreekt. Brown vermoedt dat Hipparchus nadat hij de eerste zes Schröder getallen (1, 1, 3, 11, 45, 197) door opsomming gevonden had met behulp van deze zes getallen een simpele recurrente betrekking op het spoor kwam waarmee hij de waarden van de hogere Schröder getallen berekende. Het gemiddelde van twee Schröder getallen leverde Hipparchus vervolgens zijn tweede getal op $((1+1)/2 = 1, (1+3)/2 = 2, (3+11)/2 = 7; (11+45)/2 = 28; (45+197)/2 = 121; \text{etc.})$. Uiteraard is dit geen streng bewijs en juist dat kan volgens Brown de reden zijn dat de kennis van combinatoriek die Hipparchus had verloren gegaan is. Klassieke Griekse wiskundigen zochten altijd naar strenge bewijzen voor hun resultaten en die ontbraken hier ten enen male.

Laten we voor het moment veronderstellen dat de Grieken in de tijd dat Hipparchus leefde op de hoogte waren van het bestaan van het Arabische schaakspel shatranj en dat Hipparchus er zich allerlei voor de hand liggende combinatorische vragen over stelde.

Stuk	Bord	Getallen(reeksen)
Toren	heel	Pascal's driehoek
Toren	half	Catalan's driehoek
Koning	heel	Delannoy's vierkant
Koning	half	Schröder's driehoek
Firzan	heel (toren)	Machten van twee
Paard	heel (toren)	Fibonacci reeks
Firzan	half (koning)	Eerste Hipparchus getal
Fil	half (koning)	Tweede Hipparchus getal



Getallen(reeksen) op het schaakbord

De stukken die voor shatranj gebruikt werden zijn toren, paard, koning, fil, firzan en pion. De koning, toren en paard bewegen als in het moderne schaak. De firzan (minister of raadsheer) staat op de plaats van de dame en mag slechts één veld diagonaal verzet worden. De fil (olifant) staat op de plaats van de looper en mag twee velden in diagonale richting verzet worden. De fil mag hierbij

over andere stukken heen springen. Een pion kan louter tot een firzan promoveren.

In *Famous numbers on a chessboard* (2010) heb ik de in de tabel weergegeven relaties tussen stuk (toren, koning, firzan, paard en fil), schaakbord (heel en half) en enkele getallen(reeksen) aangetoond. Hieronder een korte toelichting bij de laatste twee getallen.

Een van die voor de hand liggende combinatorische vragen is de volgende. Op hoeveel verschillende manieren kan een koning vanaf veld a1 naar h8 wandelen als de koning recht omhoog, schuin naar rechts omhoog en horizontaal naar rechts verplaatst mag worden, dit onder de conditie dat de velden onder de a1-h8 diagonaal voor de koning verboden gebied is.

1	14	96	430	1408	3534	6752	8558
1	12	70	264	714	1412	1806	
1	10	48	146	304	394		
1	8	30	68	90			
1	6	16	22				
1	4	6					
1	2						
1							

Schröder's driehoek

Het antwoord op bovenstaande vraag wordt door Schröder's getalendriehoek gegeven. Het is eenvoudig in te zien dat de koning slechts op één manier de velden op de a-lijn kan bereiken, vandaar dat op de a-lijn louter enen staan. Verder geldt dat op alle velden beneden de a1-h8 diagonaal nullen staan omdat dit voor de koning verboden gebied is. Voor alle overige velden geldt, laten we als voorbeeld veld d5 nemen, dat de koning daar slechts via drie velden heen kan, voor het veld d5 zijn dat de velden c4, c5 en d4. Het getal dat op veld d5 verschijnt is dan ook de som van de getallen op de velden c4, c5 en d4. Voor een veld op de a1-h8 diagonaal, bijvoorbeeld veld d4, geldt dat het getal dat op dit veld verschijnt eveneens de som is van drie getallen, namelijk die op de velden c3, c4

en d3, waarbij op veld d3 een nul staat. Om de twee Hipparchus getallen te vinden moeten we een negende en tiende rij met getallen aan het bord toevoegen.

Door de getallen op elke lijn van het bord naar de eerste rij te laten zakken wordt de getalendriehoek een getallenvierkant.

1	16	160	1296	9344	62736	402080	2496828
1	14	126	938	6314	40054	244790	1459810
1	12	96	652	4080	24396	142000	812948
1	10	70	430	2490	14002	77650	426150
1	8	48	264	1408	7432	39152	206608
1	6	30	146	714	3534	17718	89898
1	4	16	68	304	1412	6752	33028
1	2	6	22	90	394	1806	8558

Schröder's driehoek als vierkant

Door dit vierkant 135 graden naar rechts te draaien verschijnt op de bovenste helft van het bord gespiegeld Schröder's driehoek.

De volgende stap is het berekenen van de zogenaamde firzan sommen. Hiervoor bewegen we een firzan langs de onderste rij van a1 naar h1 (en daarna naar i1 en j1) en tellen we de getallen die we door de firzan schuin naar links omhoog te zetten bij elkaar op. Firzan sommen: 1 (de firzan staat op a1; het getal op a1), 3 = 2+1 (de firzan staat op b1; de som van de getallen op b1 en a2), 11 = 6+4+1 (de firzan staat op c1; de som van de getallen op c1, b2 en a3), 45 = 22+16+6+1 (de firzan staat op d1; de som van de getallen op d1, c2, b3 en a4), 197 = 90+68+30+8+1 (de firzan staat op e1; de som van de getallen op e1, d2, c3, b4 en a5), 903, 4279, 20793, **103049** (= het eerste getal van Hipparchus).

We herhalen deze procedure met een fil. Ook deze bewegen we langs de eerste rij van a1 naar h1 (en vervolgens naar i1 en j1) en tellen we de getallen die we door een fil schuin naar links omhoog te zetten bij elkaar op. Fil sommen: 1 (de fil staat op a1; het getal op a1); 2 (de fil staat op b1; het getal op b1); 7 = 6 + 1 (de fil staat op c1; de som van de

getallen op c1 en a3); 28 = 22+6 (de fil staat op d1; de som van de getallen op d1 en b3); 121 = 90+30+1 (de fil staat op e1; de som van de getallen op e1, c3 en a5); 550; 2591; 12536; 61921 (de fil staat op i1); **310954** (= het tweede getal van Hipparchus).

Zoals we zagen gaf Plutarchus voor het eerste getal van Hipparchus de waarden 103049 en 101049 en voor het tweede getal van Hipparchus de waarde 310952. Fabio Acerbi beargumenteert in zijn artikel op overtuigende wijze dat de getallen 103049 en 310954 de correcte waarden moeten zijn.

Het voordeel van mijn methode voor het berekenen van de Hipparchus getallen ten opzichte van die van Stanley, Habsieger en Brown is dat er louter sprake is van optellen en niet van vermenigvuldigen. Gelet op het complexe getallensysteem dat de Grieken hanteerden moet dit voor Hipparchus een prettige bijkomstigheid geweest zijn.

De relatie met het Arabische schaakspel shatranj is fraai, maar is de veronderstelling dat Hipparchus dit spel kende te verdedigen?

Harold J. R. Murray plaatst in *A History of Chess* (1913) het begin van het schaakspel in de eerste helft van de zevende eeuw na Christus. Murray: 'It is in Indian and Persian works of the first half of the seventh century A.D. that chess is first mentioned; and of these works the oldest is the *Karnamak*, a Persian romance in which the hero is said to have excelled all his contemporaries at chess (*chaturang*). This was written about A.D. 600.' Ook David Hooper en Ken Whyld zijn in *The Oxford Companion to Chess* (1992) deze mening toegedaan 'The earliest evidence of a recognizable form of chess, *chaturanga* (het Indiase schaakspel), is around A.D. 600. Before that all is speculation.'

Lijnrecht tegenover deze opinies staat die van oud-wereldkampioen schaken Viswanathan Anand. In een artikel met de titel *The Indian Defense* (Time, June 19, 2008) beantwoordt hij de vraag 'Where did chess begin?' met 'India!'. Anand: 'Some of the oldest references to the sport (chess) are found in ancient Indian texts. In the great epic *Ramayana* (which, according to some sources, was orally transmitted sometime

between 750 B.C. and 500 B.C.), the demon king Ravana invents chess to amuse his wife Mandodadi. A brilliant mind, she promptly beats him at it.' Anand voegt hier aan toe dat 'Chess also features in the Arthashastra (3rd century B.C.) perhaps the world's oldest political treatise. Its author, Chanakya, describes chess as a game of war strategy, known as chaturanga, played on an 8-by-8 board.' Volgens Anand dateert het schaakspel dus van ver voor de tijd dat Hipparchus (190 – 120 v.Chr.) leefde.



Achilles en Ajax (Exekias, ca. 530 v.Chr.)

Toch lijkt enig voorbehoud op zijn plaats. Roland Austin stelt in zijn artikel *Greek Board Games* (1940) dat 'The study of the Greek games is, in fact, a journey into complete darkness'. We weten dus zo goed als niets van de bordspelen uit de tijd van Hipparchus. Zo hebben we bijvoorbeeld van het populaire poleis spel, een petteia spel waar zowel Plato als Aristoteles aan refereren, geen idee van hoe het gespeeld werd. De suggestie dat petteia identiek zou zijn aan schaken wijst Austin als onmogelijk en misleidend van de hand.

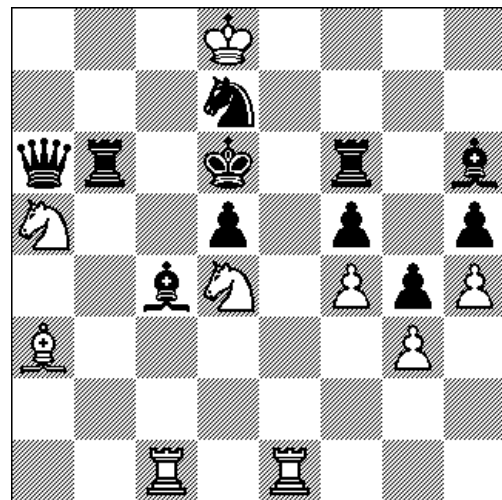
Yuri Averbakh tracht hier in zijn boek *A history of chess. From Chaturanga to the Present Day* (2012) een mouw aan te passen met een speculatieve theorie die schaken voort ziet komen uit de ontmoeting van de bordspelen van de Indiërs en de Grieken vanaf de tijd van Alexander de Grote, die van 356 tot 323 voor Christus leefde. Averbakh ziet het schaakspel in India ontstaan maar ook hij komt, nogal verrassend, tot de slotsom dat het schaakspel ongeveer 1500 jaar oud is.

Naast deze zijn er ook andere theorieën over de oorsprong van het schaakspel in omloop,

want waar het feitenmateriaal schaars is is veel avontuurlijke speculatie mogelijk zoals Hans Ree in zijn boek *Schitterend schaak* (1997) te kennen gaf. Volgens Ree heeft de geïnteresseerde leek behoefte aan een strenge en rechtvaardige schoolmeester, die de deelnemers aan de discussie in een bezonnen betoog hun rechtvaardige plaats toedeelt. De kans dat iemand zich voor dit gigantische werk zou melden schatte hij indertijd laag in.

Voor het antwoord op de vraag of Hipparchus het Arabische schaakspel shatranj kende zullen we moeten wachten tot iemand ergens zijn aantekeningen over de twee Hipparchus getallen vindt, voor ons ontcijfert en ons van zijn bevindingen op de hoogte stelt. Pas dan zal de zon doorbreken en de mist optrekken.

Tot slot een studie van al-'Adli. De lopers zijn fils en de dame is een firzan.



Al-'Adli (Bagdad, ca. 840 n.Chr.)

Oplissing: 1.Te1-e6 (Fil)c4xe6 2.Tc1-c6 Tb6xc6 3.Pd4-b5 (Firzan)a6xb5 4.Pa5-b7#

Richard Stanley, [Hipparchus, Plutarch, Schröder and Hough](#), Am. Math. Monthly 104, pp. 344-350. 4/1997.
 Laurent Habsieger, Maxim Kazarian and Sergei Lando, [On the second number of Plutarch](#), Am. Math. Monthly 105, p. 446, 1998.
 Kevin Brown, [Hipparchus on Compound Statements](#), mathpages.com, 1994-2015.
 Fabio Acerbi, [On the Shoulders of Hipparchus](#), Arch. for History of Exact Sciences 57, pp. 465-502, 2003.
 Johannes Meijer, [Famous numbers on a chessboard](#), Acta Nova, Vol. 4, No. 4, Dec. 2010, pp. 589-598.
 Suzanne Bobzien, The combinatorics of the Stoic conjunction: [Hipparchus refuted and Chrysippus vindicated](#), Oxford Studies in Ancient Philosophy, Vol. XL, Summer 2011.